p dann Minimum von $\varkappa_2$. Wir behaupten: p ist Nabelpunkt, also es gilt ⊛ $\varkappa_1(p) = \varkappa_2(p)$.

Es folgt für $q \in S$

$$\varkappa_1(p) \geq \varkappa_1(q) \underset{\text{Vor.}}{\geq} \varkappa_2(q) \geq \varkappa_2(p),$$

also mit ⊛ $\varkappa_1 = \varkappa_2$, jeder Punkt ist Nabelpunkt.

Somit ist S Teil einer Sphäre. Da aber S kompakt und zusammenhängend ist, muss S selbst eine Sphäre sein.

ad ⊛: Sei $\varkappa_1(p) > \varkappa_2(p)$. Dann gilt $\varkappa_1 > \varkappa_2$ auch auf einer Umgebung von p (keine Nabelpunkte dort), und ohne Beweis sei vermerkt, dass es dann lokal bei p eine Parametrisierung $X: \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}^3$ von S gibt, so dass $u \mapsto X(u,v)$, $v \mapsto X(u,v)$ jeweils Krümmungslinien sind, also etwa

$$-N_u = \varkappa_1 X_u \,, \quad -N_v = \varkappa_2 X_v \,, \quad X_u \cdot X_v = 0 .$$

Es folgt $\mathcal{F} = 0$ sowie

$$\mathcal{L} = -N_u \cdot X_u = \varkappa_1 X_u \cdot X_u = \varkappa_1 \mathcal{E} ,$$

$$\mathcal{M} = -N_u \cdot X_v = \varkappa_1 X_u \cdot X_v = 0 ,$$

$$\mathcal{N} = -N_v \cdot X_v = \varkappa_2 X_v \cdot X_v = \varkappa_2 \mathcal{G} .$$

Aus den Mainardi-Codazzi Gleichungen (10) bekommt man

$$\mathcal{L}_v = b_{11;2} \underset{(10)}{=} \Gamma^{\tau}_{21} b_{\tau 1} - \Gamma^{\tau}_{11} b_{\tau 2} + b_{21;1}$$

$$= \Gamma^{1}_{21} \mathcal{L} - \Gamma^{2}_{11} \mathcal{N} + \underbrace{(\mathcal{M})_u}_{=0} \underset{(14)}{=} \frac{1}{2} \frac{\mathcal{E}_v}{\mathcal{E}} \mathcal{L} + \frac{1}{2} \frac{\mathcal{E}_v}{\mathcal{G}} \mathcal{N} \Longrightarrow$$

$$\mathcal{L}_v = \frac{1}{2} \mathcal{E}_v \left(\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{E}} + \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{G}} \right) = \frac{1}{2} \mathcal{E}_v \left(\varkappa_1 + \varkappa_2 \right) ,$$

und entsprechend

$$\mathcal{N}_u = b_{22;1} \underset{(10)}{=} \cdots \underset{(14)}{=} \frac{1}{2} \mathcal{G}_u \left(\varkappa_1 + \varkappa_2 \right) .$$

Andererseits ergibt $\mathcal{L} = \varkappa_1 \mathcal{E}$ die Gleichung

$$\mathcal{L}_v = \mathcal{E}_v \varkappa_1 + \mathcal{E}(\varkappa_1)_v ,$$

und aus $\mathcal{N} = \varkappa_2 \, \mathcal{G}$ folgt analog

$$\mathcal{N}_u = \mathcal{G}_u \varkappa_2 + \mathcal{G}(\varkappa_2)_u .$$

Insgesamt ergibt sich

$$\mathcal{E}_v = 2\,\mathcal{L}_v / \varkappa_1 + \varkappa_2 = 2\,\mathcal{E}_v \frac{\varkappa_1}{\varkappa_1+\varkappa_2} + 2\,\frac{\mathcal{E}(\varkappa_1)_v}{\varkappa_1+\varkappa_2}$$

$$\Longrightarrow \mathcal{E}_v = -\frac{2\mathcal{E}}{\varkappa_1-\varkappa_2}(\varkappa_1)_v ,$$

$$\mathcal{G}_u = 2\,\mathcal{N}_u / \varkappa_1 + \varkappa_2 = 2\,\mathcal{G}_u \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1+\varkappa_2} + 2\,\frac{\mathcal{G}(\varkappa_2)_u}{\varkappa_1+\varkappa_2}$$

$$\Longrightarrow \mathcal{G}_u = \frac{2\mathcal{G}}{\varkappa_1-\varkappa_2}(\varkappa_2)_u .$$

Schließlich ersetzen in der Formel (15) für K die Größen $\mathcal{E}_v$, $\mathcal{G}_u$ durch obige Terme, es folgt:

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}}}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(-\frac{2\mathcal{E}}{\varkappa_1-\varkappa_2}\frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}}}(\varkappa_1)_v\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{2\mathcal{G}}{\varkappa_1-\varkappa_2}\frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}}}(\varkappa_2)_u\right)\right] =$$

$$\frac{-1}{2\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}}}\Big[-\frac{2\mathcal{E}}{\varkappa_1-\varkappa_2}\frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}}}(\varkappa_1)_{vv}+\frac{2\mathcal{G}}{\varkappa_1-\varkappa_2}\frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}}}(\varkappa_2)_{uu}$$

$$+(\varkappa_1)_v\, f_1(u,v)+(\varkappa_2)_u\, f_2(u,v)\Big]$$

mit geeignet definierten Funktionen f_1, f_2.

Also:

$$-2\,\mathcal{E}\,\mathcal{G}\,K = -\frac{2\mathcal{E}}{\varkappa_1-\varkappa_2}(\varkappa_1)_{vv}+\frac{2\mathcal{G}}{\varkappa_1-\varkappa_2}(\varkappa_2)_{uu}$$

$$(**)\qquad +(\varkappa_1)_v\, f_1(u,v)+(\varkappa_2)_u\, f_2(u,v).$$

Wegen $K>0$ ist die linke Seite von $(**)$ <0.

Sei $X(0,0)=p$. Dann ist in $(0,0)$

$$(\varkappa_1)_v=(\varkappa_2)_u=0\,,\ (\varkappa_1)_{vv}\le 0,\ (\varkappa_2)_{uu}\ge 0$$

(da p Max. von $\varkappa_1$, Min. von $\varkappa_2$),

so dass die rechte Seite von $(**)$ ≥ 0 ist, Widerspruch!

Die Annahme $\varkappa_1(p)>\varkappa_2(p)$ ist falsch, es folgt $(*)$.

§4 Paralleltransport und geodätische Linien auf Flächen

Es sei hier $X : \mathbb{R}^2 \supset \Omega \to \mathbb{R}^3$ immer (Parametrisierung) eine(r) reguläre(n) Fläche, $\omega : [a,b] \to \Omega$ eine Kurve im Parameterbereich und $c := X \circ \omega$ die zugehörige Kurve auf X.

Definition 5: Ein Vektorfeld $V : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ heißt tangential längs c, falls für alle $t \in [a,b]$ gilt

$$V(t) \in T_{c(t)} X .$$

$\mathcal{V}_c :=$ alle tangentialen Vektorfelder längs c.

Ein beliebiges tangentiales Vektorfeld $V = V(t) \in \mathcal{V}_c$ hat also die Darstellung

$$V(t) = V_\alpha(t)\, X_{,\alpha}(\omega(t))$$

(Darstellung von $V(t) \in T_{c(t)} X$ durch die Basisvektoren $X_{,1}(\omega(t)), X_{,2}(\omega(t))$). Die Ableitung

$V'(t)$ ist i.a. nicht tangential. Deshalb definiert man für $V \in \mathcal{V}_c$ die <u>kovariante Ableitung</u>

$$\frac{DV}{dt} \in \mathcal{V}_c$$

durch

$$\boxed{\frac{DV}{dt}(t) := P(c(t)) \left\{ \frac{d}{dt} V(t) \right\}}$$

wobei $P(c(t)) : \mathbb{R}^3 \to T_{c(t)}X$ die <u>orthogonale Projektion</u> auf die Tangentialebene $T_{c(t)}X$ bezeichnet. Es gilt dann die <u>Produktregel</u>

$$U, V \in \mathcal{V}_c : \frac{d}{dt}(U \cdot V) = \frac{DU}{dt} \cdot V + U \cdot \frac{DV}{dt} .$$

Sei $V \in \mathcal{V}_c$. Dann ist

$$\frac{d}{dt} V(t) = \frac{d}{dt}\left(V^\alpha X_{,\alpha}(\omega(t))\right) =$$

$$\frac{d}{dt} V^\alpha X_{,\alpha}(\omega(t)) + V^\alpha \frac{d}{dt} X_{,\alpha}(\omega(t)) =$$

$$\dot{V}_\alpha \, X_{,\alpha}(\omega(t)) + V^\alpha \, X_{,\alpha\beta}(\omega(t)) \, \dot{\omega}_\beta(t) \, ,$$

wobei $\dot{V}_\alpha = \frac{d}{dt} V_\alpha$, etc.

Wir haben die Gauß'sche Darstellungsformel (vgl. (1)' in §3)

$$X_{,\alpha\beta} = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} X_{,\gamma} + b_{\alpha\beta} N \, ,$$

also
$$\dot{V}(t) = \left[\dot{V}_\gamma + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(\omega(t)) \, V_\alpha \, \dot{\omega}_\beta \right] X_{,\gamma}(\omega(t)) +$$
$$V^\alpha \, b_{\alpha\beta} \, \dot{\omega}_\beta(t) \, N \, ,$$

und für die kovariante Ableitung folgt:

$$\boxed{\frac{DV}{dt}(t) = \left[\dot{V}_\gamma(t) + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(\omega(t)) \, V_\alpha(t) \, \dot{\omega}_\beta(t) \right] X_{,\gamma}(\omega(t))} \tag{1}$$

Sei nun c nach der Bogenlänge parametrisiert, also $|\dot{c}(s)| = 1$. In Kapitel II, §2, Gleichung (3) auf p. 158, wurde gezeigt ($\varkappa_g$ = geod. Krümmung, $\varkappa_n$ = Normalkr.)

$$\ddot{c}(s) = \varkappa_g \, (N(\omega(s)) \times \dot{c}(s)) + \varkappa_n \, N(\omega(s)) \, ;$$

so dass

$$\frac{D}{ds}\,\dot{c}(s) = P(c(s))\,\ddot{c}(s) = \varkappa_g\, N(\omega(s)) \times \dot{c}(s).$$

Folglich ist die geodätische Krümmung $\varkappa_g(s)$ von $c(s)$ 0 genau dann, wenn

$$(2) \qquad \frac{D}{ds}\,\dot{c}(s) \equiv 0$$

ist. Mit (1) liest sich (2) $\left(V = \dot{c} = \frac{d}{ds}(X \circ \omega) = X_{,\rho}(\omega)\,\dot{\omega}_\rho,\ \text{also } V_\rho = \dot{\omega}_\rho\right)$:

$$(3) \qquad \ddot{\omega}_\gamma + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(\omega)\,\dot{\omega}_\alpha \dot{\omega}_\beta \equiv 0,\ \gamma = 1,2.$$

<u>Definition 6</u>: a) Man nennt Kurven $X \circ \omega = c$, die den Gleichungen (3) genügen, <u>Geodätische auf X</u>, und (3) heißen <u>Differentialgleichungen der Geodätischen</u>. Hier wird nicht verlangt, dass c nach der Bogenlänge parametrisiert ist.

b) Ein Vektorfeld $V(t) = V_\alpha(t)\, X_{,\alpha}(\omega(t)) \in V_c$

heißt <u>parallel längs c</u>, falls $\frac{DV}{dt} \equiv 0$, d.h. falls

$$(4) \qquad \boxed{\dot{V}_\gamma + \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}(\omega)\, V_\alpha\, \dot{\omega}_\beta \equiv 0, \quad \gamma = 1,2} \qquad \text{gilt (vgl. (1)).}$$

[

V ändert sich nicht in tang. Richtung]

Sind U, V <u>parallele Vektorfelder</u> aus V_c, so ist

$$\frac{d}{dt}(U \cdot V) = U \cdot \frac{DV}{dt} + \frac{DU}{dt} \cdot V \equiv 0;$$

($\Rightarrow |U(t)| \equiv \text{const}$ mit der Wahl $V = U$!)

Speziell folgt für eine <u>Geodätische</u>

$$\frac{d}{dt}(\dot{c} \cdot \dot{c}) \equiv 0,$$

d.h. $|\dot{c}(t)| \equiv \text{const}$. <u>Jede Geodätische ist automatisch proportional zur Bogenlänge parametrisiert</u>, und somit verschwindet die geodätische Krümmung, wenn man auf die Bogenlänge umparametrisiert (nur für diesen Fall war $\varkappa_g$ erklärt).

Wir betrachten jetzt das Längenfunktional

$$L(c) := \int_a^b |\dot{c}(t)|\, dt, \quad c = X \circ \omega : [a,b] \to \mathbb{R}^3 .$$

Sei $V \in \mathcal{V}_c$ ein tangentiales Vektorfeld längs c. Man variiert c in Richtung von V, d.h. man betrachtet eine Schar

$\Psi(t,\varepsilon)$, $(t,\varepsilon) \in [a,b] \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ von Kurven $\Psi(\cdot,\varepsilon)$

auf X mit

$$\Psi(t,0) = c(t), \quad \frac{\partial}{\partial\varepsilon|_0} \Psi(t,\varepsilon) = V(t).$$

Diese Schar gewinnt man z.B. durch die Setzung

$$\Psi(t,\varepsilon) = X\left(\omega(t) + \varepsilon \tilde{V}(t)\right),$$

$$\tilde{V}(t) := \left(DX_{\omega(t)}\right)^{-1} \left(V(t)\right) \in \mathbb{R}^2 .$$

(Gemäß $V(t) \in T_{\omega(t)} X$ ist $\tilde{V}(t)$ wohldefiniert.)

Man betrachtet nun die 1^{te} Variation

$$\frac{d}{d\varepsilon|_0} L\left(\Psi(\cdot,\varepsilon)\right)$$

der Länge L an der Stelle c in Richtung V: